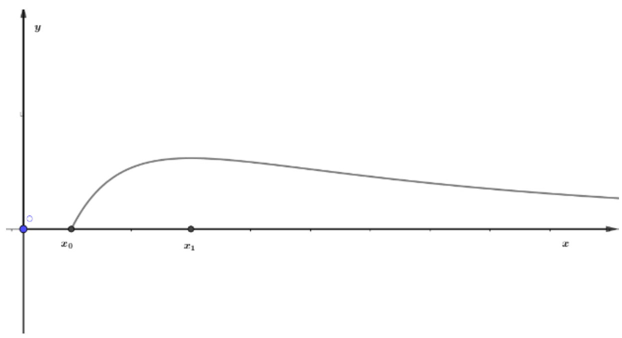
Mathesis

2° ESEMPIO DI SECONDA PROVA
Esami di Stato – Liceo scientifico
GIUGNO 2019

PROBLEMA 1[i]



Il grafico disegnato in figura descrive l'andamento in funzione di x del valore, espresso in opportune unità di misura, di una forza F che agisce nella direzione e verso dell'asse x ed è applicata ad una particella libera di muoversi lungo lo stesso asse.
La funzione F(x), definita per x$\geq x_0 > 0, con\ F(x_0) = 0$, è dotata di derivata prima e seconda, ha per asintoto l'asse x e ha un massimo relativo e assoluto in x_1 .

a) Si dica qual è il significato fisico dell'integrale definito $\int_h^k F(x)$ dx per ogni coppia di valori, h e k, appartenenti all'intervallo x$\geq x_0$ e se ne studi il segno.
b) Un possibile modello di $F(x)$ è un'opportuna restrizione della funzione $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}$, dove si suppone che le costanti numeriche abbiano le dimensioni adeguate. Si determinino i valori di x_0, e di x_1 e si mostri che F (x) ammette un flesso nel punto di ascissa $x_2 = 4$.
c) Supponendo che la forza F sia conservativa si scriva una possibile espressione $U(x)$ per l'energia potenziale associata, illustrando il procedimento seguito. Si discuta il segno di $U(x)$.
d) Si confronti, per x>0, l'andamento di $F(x)$ con quello di una forza $F_1(x)$inversamente proporzionale al quadrato di x e tale $F_1(x_2) = F(x_2)$.
Si può affermare che $F_1(x)$ tende a 0 più rapidamente di F(x) al tendere di x a infinito? Si giustifichi la risposta.

PROBLEMA 2[ii]

Sia f la funzione definita, per $x > 0$, da $f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x)$.

1. Si provi che $f'(x) = \frac{2(x-4)(x+3)}{x}$ e si provi altresì che $f(x)$ assume solo valori positivi.
2. Un'azienda verifica che gli oggetti che essa produce hanno un costo unitario di $f(x)$ euro quando $1 \leq x \leq 10$ e x esprime le centinaia di oggetti prodotti. Per esempio: per 120 oggetti prodotti, il costo di produzione, per oggetto, arrotondato a meno di 10^{-2}, è $f(1{,}2) \approx 24{,}66$. Questo significa che l'azienda, per non lavorare in perdita, dovrà vendere ciascun oggetto prodotto a più di 24,66 euro. Si calcoli $f(2{,}2)$ arrotondato a meno di 10^{-2} e si interpreti il risultato seguendo l'esempio precedente. Si calcoli altresì $f(7{,}19)$ e $f(8)$.

3. Si mostri, illustrando il ragionamento seguito, che l'equazione $f(x) = 20$ ammette esattamente due soluzioni reali appartenenti all'intervallo [1;10] e se ne determini il valore arrotondato a meno di 10^{-2}
4. Dai risultati precedenti si deducano le informazioni relative all'attività dell'azienda per non lavorare in perdita nel caso essa decida di vendere gli oggetti prodotti a 20 euro ciascuno. Per quali quantità di oggetti prodotti l'azienda guadagna? Qual è il valore del guadagno massimo?

QUESTIONARIO

1. Le sostanze organiche degli organismi viventi sono radioattive in ragione di 16 disintegrazioni al minuto per grammo di carbonio naturale in esse contenuto. Un pezzo di legno trovato nelle Piramidi d'Egitto ha mostrato un'attività di 11 disintegrazioni al minuto per grammo di carbonio. Si calcoli l'epoca in cui il legno ha abbandonato il ciclo vitale, sapendo che il tempo di dimezzamento del C_{14} è T = 5730 anni.[iii]

2. La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   porta il nome di *Carl Friederich Gauss* (1777 – 1855) ed è molto nota nel campo delle applicazioni della matematica. Si dica brevemente della sua importanza specificando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri ne influenzino il grafico. [iv]

3. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^{2019}}{2^x} = 0$ [v]

4. Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$ [vi]

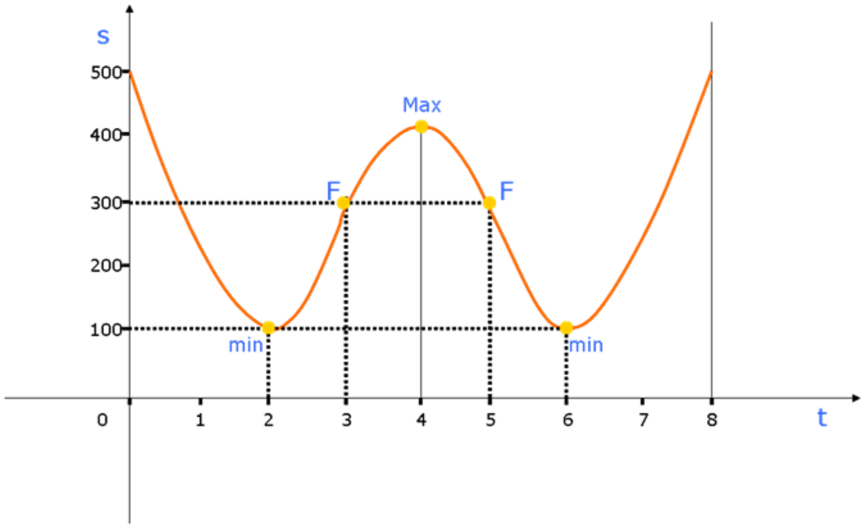
5. Due cariche elettriche $Q_1 > 0$ e $Q_2 < 0$ sono poste negli estremi di un segmento di lunghezza d. Qual è il punto del segmento in cui il campo elettrico ha modulo minimo?[vii]

6. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti *A* (0; -1) e *B* (-1; 3). Si determini l'equazione della retta passante per *B* e avente distanza massima da *A*.[viii]

7. La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo t = 0 e di 6500 al tempo t=3. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con

un'equazione del tipo $\frac{dy}{dt} = ky$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo t=10, la popolazione supererà i 20000 batteri?[ix]

8. Il grafico in figura ci fornisce il diagramma orario di un punto materiale in un intervallo di tempo di 8 secondi; lo spazio è misurato in metri. Si deduca il grafico della velocità e dell'accelerazione a partire dal grafico dello spazio. [x]



NOTE
Durata della prova: sei ore

---

[i]La proposta è di Adriana Lanza. **Gli obiettivi (QdR) per la fisica: Determinare l'energia potenziale di un punto materiale soggetto a forze. Per la matematica: Risolvere equazioni e disequazioni algebriche**
A partire dall'espressione analitica di una funzione risalire alle caratteristiche salienti del suo grafico e viceversa. Discutere l'esistenza e determinare il valore del limite di una funzione. Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e di minimo. Analizzare le caratteristiche della funzione integrale e applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale

[ii]La proposta è un tema elaborato per la maturità 2015 ma non assegnato. Trae spunto da un problema assegnato al baccalaureato francese degli anni scorsi. Contiene richieste di arrotondare dati numerici.
[iii] Il quesito riguarda in particolare il punto 12 del QdR di fisica e il punto 14 QdR matematica
[iv] In forma analoga è un quesito già proposto nel 2007. Riguarda in modo particolare il punto 27 del QdR di matematica.
[v] Un quesito analogo è stato proposto più volte, ad esempio nel 2008 punto 17 QdR matematica
[vi] È stato già proposto nel 2008. Riguarda il punto 8 del QdR di matematica.
[vii] Il quesito è di Francesco Daddi riguarda il punto 20 dei QdR di Fisica
[viii] Analogo ad altri quesiti già assegnati. Ad esempio nel 2013. Riguarda più punti del QdR di matematica, si pone in un'ottica di continuità e mira a soddisfare le parti più comuni e consolidate dello studio liceale della matematica.
[ix] Assegnato Europa 2015 punto 14 del QdR di matematica
[x] Il quesito è di Serenella Iacino. Obiettivi (QdR) Fisica: legame tra le funzioni spazio, velocità e accelerazione di un punto materiale. Matematica: saper passare da un grafico di una funzione f(x) al grafico della sua derivata prima e a quello della sua derivata seconda.